

V. Planimetrie

§1. Základní pojmy

Pozn.: a) V kapitole o planimetrii budeme pracovat v rovině E_2 , což je základní množina, jejíž prvky jsou body – *(= geometrické a rovinné)* *matematicky odlišitelné body roviny*
 E_2 ... euklidovský prostor dimenze 2

b) Podmnožiny v E_2 – přímky, označujeme malými písmeny.
Množinu všech přímek v rovině označujeme $\mathcal{P}$ (psacím P).

c) Vztahy zapisujeme takto:
 $A \in p$... bod A leží na přímce p ; přímka p obsahuje bod A .
 $\in$..., „ležet na“ - relace incidence
 $p \subseteq E_2$ ($p \in \mathcal{P}$) ... přímka p leží v rovině E_2 .

Pozn.: Bod, přímka a rovina jsou tzv. primitivními pojmy (základní), které nedefinujeme a vyslovujeme o nich nedokazatelná tvrzení (axiomy), které považujeme za platné. Z nich budujeme soustavu planimetrických pojmů a vět.

Axiomy incidence pro přímku (axiomy relace „ $\in$ “ pro přímku)

A_1 : Každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka:

$$\forall A, B \in E_2, A \neq B : \exists! p \in \mathcal{P} : A \in p \wedge B \in p$$

A_2 : Na každé přímce leží alespoň 2 různé body:

$$\forall p \in \mathcal{P} : \exists A, B \in E_2 : A \neq B \wedge A \in p \wedge B \in p$$

A_3 : Existují alespoň 3 body, které neleží na jedné přímce:

$$\exists A, B, C \in E_2 (A \neq B \neq C) : \forall p \in \mathcal{P} : A \notin p \vee B \notin p \vee C \notin p$$

Axiom rovnoběžnosti (Euklidův axiom, pátý Euklidův postulát o rovnoběžkách)

A_4 : Každým bodem, který neleží na dané přímce, prochází právě jedna přímka, která s danou přímkou nemá žádný společný bod:

$$\forall A \in E_2, \forall p \in \mathcal{P} : A \notin p \Rightarrow \exists! q \in \mathcal{P} : A \in q \wedge p \cap q = \emptyset$$

V.1.1.: Existují alespoň tři přímky, které nemají společný bod

[Dk.: Dle $A_3 \exists A, B, C \in E_2$, které neleží na jedné přímce, tj: $A \neq B, B \neq C, C \neq A$

Dle $A_1 p_1 = \overrightarrow{AB}, p_2 = \overrightarrow{BC}, p_3 = \overrightarrow{AC}, p_1 \neq p_2, p_1 \neq p_3, p_2 \neq p_3$
 $\Rightarrow p_1 \cap p_2 \cap p_3 = \emptyset$]

V.1.2.: $\forall p, q \in \mathcal{P}: p = q \Rightarrow p \cap q \neq \emptyset$

[Dk.: Plyne z A_2]

Pozn.: Pro klasifikaci vzájemné polohy dvou přímek v E_2 má význam obměna věty 1.2.:

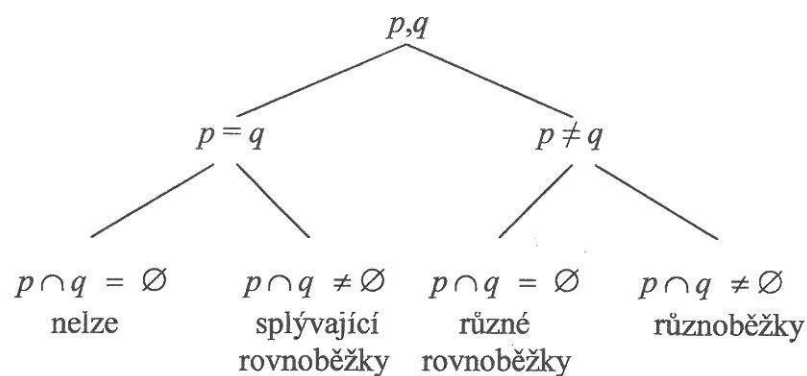
$$\forall p, q \in \mathcal{P}: p \cap q = \emptyset \Rightarrow p \neq q$$

V.1.3.: $\forall p, q \in \mathcal{P}: p \cap q$ je alespoň dvou prvková množina $\Rightarrow p = q$

[Dk.: $p \cap q = \{A, B\}, A \neq B \Rightarrow A \in p \wedge B \in p \wedge A \in q \wedge B \in q \xrightarrow{A_1} p = q$]

Pozn.: Věty 1.3. výhodně užíváme k důkazu totožnosti dvou přímek, neboť stačí dokázat, že mají společné dva body.

Pozn.: Třídění vzájemné polohy dvou přímek $p, q \subseteq E_2$ provádíme podle tohoto schématu:



Def.: Necht' $p, q \in \mathcal{P}$. Jestliže platí:

- $p = q$, pak přímky p, q se nazývají splývající rovnoběžky
- $p \neq q \wedge p \cap q = \emptyset$, pak přímky p, q se nazývají různé rovnoběžky
- $p \neq q \wedge p \cap q \neq \emptyset$, pak přímky p, q se nazývají různoběžky.

V.1.4.: Necht' $p, q \in \mathcal{P}$ jsou různoběžky, pak $p \cap q = \{P\}$, bod P nazveme průsečíkem (průnikem) různoběžek p, q .

[Dk.: sporem: podle definice různob. přímek platí, že $p \cap q \neq \emptyset$. Je-li $p \cap q$ alespoň dvouprvková množina $\Rightarrow p = q \Rightarrow p \parallel q$ – spor.]

Pozn.: a) Jsou-li přímky p, q rovnoběžné, zapisujeme $p \parallel q$, jsou-li různoběžné, zapisujeme $p \nparallel q$.

b) Pro dvě přímky $p, q \subseteq E_2$ platí, že p není rovnoběžná s q znamená totéž jako p je různoběžná s q , v E_3 to však neplatí.

c) Pomocí pojmu rovnoběžnost lze vyjádřit axiom A_4 i pro body na přímce.
Platí: A_4' : Každým bodem lze ke každé přímce vést právě jednu rovnoběžku.

Pro $\forall A \in E_2, \quad \forall p \in \mathcal{P} \exists! q \in \mathcal{P}; q \parallel p \wedge A \in q$

V.1.5.: Tranzitivnost rovnoběžnosti: $\forall p, q, r \in \mathcal{P}: p \parallel q \wedge q \parallel r \Rightarrow p \parallel r$

Důsledek V.1.5.: Protíná-li přímka jednu z rovnoběžek, pak protíná i druhou.

$\forall p, q, r \in \mathcal{P}: p \parallel q \wedge p \nparallel r \Rightarrow q \nparallel r$ (jde o obměnu věty 1.5.)

Def.: Necht' $A, B, C \in E_2$ jsou tři body. Jestliže všechny tři leží na jedné přímce, řekneme, že jsou kolineární. V opačném případě jsou nekolineární.

§2. Uspořádání na přímce

Pozn.: Jako další primitivní pojem zavedeme vztah „ležet mezi“- relace uspořádání.



„Bod C leží mezi body A, B “; zapisujeme $C \mu AB$.

Relaci uspořádání značíme μ [mí].

Vlastnosti relace μ vyjadřují následující axiomy:

„Bod C mezi body A, B “ zapisujeme $C \mu AB$ “

Axiomy uspořádání pro přímku (axiomy relace „ μ “ pro přímku)

A_5 : $\forall A, B, C \in E_2: C \mu AB \Rightarrow A, B, C$ jsou tři různé kolineární body a také platí $C \mu BA$

A_6 : $\forall A, B \in E_2, A \neq B: \exists C \in E_2: B \mu AC$

A_7 : $\forall A, B \in E_2, A \neq B: \exists D \in E_2: D \mu AB$

A_8 : Ze tří různých kolineárních bodů právě jeden leží mezi dvěma ostatními.

$$\forall A, B, C \in p \subseteq E_2, A \neq B, B \neq C, A \neq C: A \bar{\mu} BC \wedge B \bar{\mu} AC \Rightarrow C \mu AB$$

A_9 : $\forall A, B, C, D \in E_2, B \mu AC \wedge C \mu BD \Rightarrow B \mu AD$

A_{10} : $\forall A, B, C, D \in E_2, B \mu AD \wedge C \mu BD \Rightarrow C \mu AD$

Def.:

a) Necht' $p \in \mathcal{P}, A \in p, B \in p, A \neq B$.

Množinu $P_1(A) = \{X \in E_2; X = B \vee X \mu AB \vee B \mu AX\}$ nazýváme otevřenou polopřímku $\overrightarrow{AB}$ s počátkem A . *zapisujeme $\overrightarrow{AB}$ ($0 \rightarrow AB$)*

Množinu $P_2(A) = \{X \in E_2; A \mu BX\}$ nazýváme otevřenou polopřímku opačnou k polopřímce $\overrightarrow{AB}$ s počátkem A .

b) Množinu $P_1(A) \cup \{A\}$ nazveme $\overline{AB}$ (uzavřenou) polopřímku s počátkem A . *zapisujeme $\overline{AB}$ ($0 \rightarrow AB$)*

Množinu $P_2(A) \cup \{A\}$ nazveme (uzavřenou) polopřímku opačnou k polopřímce $\overrightarrow{AB}$ s počátkem A .

Pozn.:

a) Sjedením dvou opačných polopřímek je přímka, průnikem společný počátek.

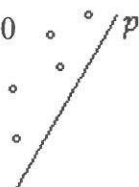
b) Místo pojmu „otevřená polopřímka“ užíváme pojem „vnitřek polopřímky“.

Def.: Necht' body $A, B \in E_2$, $A \neq B$. Průnik polopřímek $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ nazveme úsečkou AB .
 Body A, B se nazývají krajní body úsečky AB , bod $X \in AB$ se nazývá vnitřní bod úsečky AB .

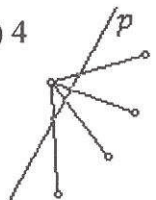
V.2.1.: Bod X je vnitřním bodem úsečky $AB \Leftrightarrow X \in AB$.

Př.: Jestliže pět různých bodů leží mimo přímku p , kolik úseček, spojujících dvě z nich, protne přímku p ?

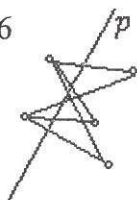
Řešení: 1) 0



2) 4



3) 6



Př.: Je dáno n různých přímek, žádné dvě nejsou rovnoběžné, žádné tři neprocházejí jedním bodem. Určete počet průsečíků.

Řešení: $\frac{n(n-1)}{2}$

§3. Polorovina

Pozn.: Jako další pojem (ne primitivní) zavedeme relaci „přímka odděluje dva body“. Budeme používat znak $\bar{\nu}$ [ný].

Def.: Necht' $a \in \mathcal{P}$, $A \notin a$, $B \notin a$, $A \neq B$. Řekneme, že přímka a odděluje body A, B (zapisujeme $a \bar{\nu} AB$), jestliže $\exists X \in E_2: X \in a \wedge X \mu AB$.

V opačném případě řekneme, že přímka a neodděluje body A, B a zapisujeme $a \bar{\nu} \bar{AB}$.

Axiomy pro rovinu (axiomy relace „ $\bar{\nu}$ “ pro rovinu)

A₁₁: $\forall A, B, C \in E_2, \forall a \in \mathcal{P}: a \bar{\nu} AB \wedge a \bar{\nu} AC \Rightarrow a \bar{\nu} BC$

A₁₂: Necht' $a \in \mathcal{P}$ je přímka v E_2 . Pak všechny body $X \in E_2 \setminus a$ lze rozdělit do dvou podmnožin $P_1(a)$, $P_2(a)$ takto:

- 1) Přímka a odděluje každé dva body z různých podmnožin.
 $\forall X \in P_1(a), \forall Y \in P_2(a): a \bar{\nu} XY$
- 2) Přímka a neodděluje žádné dva body z jedné podmnožiny.
 $\forall X, Y \in P_i(a), i \in \{1, 2\}: a \bar{\nu} \bar{XY}$

Def.: Množinu $P_1(a)$ z **A₁₂** nazýváme otevřenou polorovinou s hranicí a (s hraniční přímkou a), množinu $P_2(a)$ nazýváme otevřenou polorovinou s hranicí a opačnou k $P_1(a)$. Množinu $P_1(a) \cup a$ nazveme (uzavřenou) polorovinou s hranicí a . Množinu $P_2(a) \cup a$ nazveme (uzavřenou) polorovinou s hranicí a opačnou k $P_2(a)$.

Pozn.:

- a) Sjedením dvou opačných polorovin je rovina. Průnikem dvou opačných polorovin je hraniční přímka.
- b) Místo pojmu „otevřená polorovina“ užíváme „vnitřek poloroviny“.
- c) Je-li $a \in \mathcal{P}$ hraniční přímka, $A \in E_2$, $A \notin a$ ~~je-li bod A vnitřní bod poloroviny~~, pak polorovinu $P_1(a) \cup a$, které náleží A , značíme $\overrightarrow{aA}$ (někdy aA)
- d) Jsou-li $A, B, C \in E_2$ různé nekolineární body, pak polorovinu s hranicí $\overrightarrow{AB}$, které náleží bod C , značíme $\overrightarrow{ABC}$.

V.3.1.: Necht' $\overrightarrow{AB}$ je polopřímka, $a \in \mathcal{P}$, $A \in a$, $B \notin a$, pak platí: $\overrightarrow{AB}$ leží v polorovině $\overrightarrow{aB}$ ($\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{aB}$).

[Dk.: Necht' $a \nparallel \overrightarrow{AB} \Rightarrow a \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}$. Necht' $\nexists X \in E_2, X \in \overrightarrow{AB}, X \neq A$ ~~je-li bod~~

$$\Rightarrow X \mu AB \vee B \mu AX \vee X = B \Rightarrow a \bar{\nu} AX \Rightarrow X \in \overrightarrow{aB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{aB}]$$

Důsledek věty 3.1.: Necht' AB je úsečka, $a \in \mathcal{P}$, $A \in a$, $B \notin a$, pak : $AB \subseteq \overrightarrow{aB}$

V.3.2.: Necht' $a \in \mathcal{P}$, $P_1(a)$ je otevřená polorovina. Pak platí:

1. $\forall X, Y \in E_2, X \neq Y; X, Y \in P_1(a) \Rightarrow XY \cap a = \emptyset$
2. $\forall X, Y \in E_2 \setminus a, X \in P_1(a) \wedge Y \notin P_1(a) \Rightarrow XY \cap a \neq \emptyset$

[Dk.: 1. Necht' $Z \in P_2(a)$ lib. $\Rightarrow a \vee ZX \wedge a \vee ZY \xRightarrow{A11} a \vee XY \Rightarrow$ na úsečce XY neleží žádný bod přímky $a \Rightarrow XY \cap a = \emptyset$
 2. obdobně]

Def.: Necht' $A, B, V \in E_2$ jsou tři různé nekolineární body.

Průnik polorovin $\overrightarrow{VBA} \cap \overrightarrow{VAB}$ nazveme konvexním úhlem (zapisujeme $\sphericalangle BVA$), V jeho vrcholem, polopřímky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ jeho rameny.

Nekonvexním úhlem $\sphericalangle BVA$ nazveme sjednocení polorovin opačných k polorovinám $\overrightarrow{VBA}, \overrightarrow{VAB}$.

Pozn.:

- a) Jestliže polopřímky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ splynou, pak úhel $\overrightarrow{VBA} \cap \overrightarrow{VAB}$ nazveme nulovým úhlem.
- b) Jestliže $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ jsou opačné polopřímky, pak libovolnou z polorovin určenou přímkou $\overleftrightarrow{AB}$ nazveme přímým úhlem.

Pozn.:

- a) Konvexní bodovou množinou rozumíme každou bodovou množinu, která s každými svými body A, B obsahuje i celou úsečku AB .
- b) Nekonvexní bodovou množinou nazýváme takovou bodovou množinu, v níž existuje dvojice bodů A, B taková, že úsečka AB neleží v této množině.
- c) Nulový a přímý úhel považujeme za konvexní.

Def.: Necht' $A, B, C \in E_2$ jsou tři různé nekolineární body.

Trojúhelníkem ABC (značíme $\triangle ABC$) nazýváme průnik polorovin $\overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{CAB}$. Body A, B, C nazýváme vrcholy trojúhelníka, úsečky AB, BC, CA jeho strany, sjednocení úseček $AB \cup BC \cup CA$ jeho obvodem.

Pozn.:

- a) Obdobně lze definovat n -úhelník. V těchto případech však rozlišujeme n -úhelníky konvexní (vypuklé) a nekonvexní (duté).
- b) Trojúhelník je vždy konvexní.

V.3.3.: Necht' $A, B, C \in E_2$ jsou 3 různé nekolineární body, $a \in \mathcal{P}$ přímka, na níž žádný z bodů A, B, C neleží. Necht' přímka a protíná stranu AB trojúhelníka $\triangle ABC$ v jejím vnitřním bodě X . Pak protíná právě jednu ze zbývajících stran BC , CA ve vnitřním bodě Y .

[Dk.: Přímka a rozděluje E_2 na dvě poloroviny, body A, B leží v opačných polorovinách s hranicí a , bod C leží v jedné z těchto polorovin.

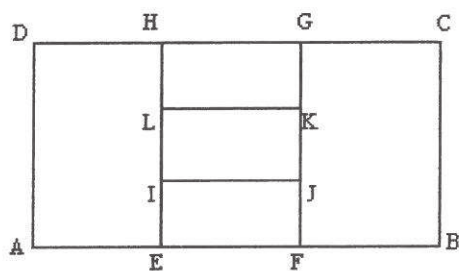
$$\text{a) Necht' } C \in aA \Rightarrow a \cap BC \neq \emptyset \wedge a \cap AC = \emptyset \Rightarrow BC \cap a =$$

$$\text{b) Necht' } C \in aB \Rightarrow a \cap AC \neq \emptyset \wedge a \cap BC = \emptyset \Rightarrow AC \cap a =$$

V obou případech protíná přímka a právě jednu ze stran $\triangle ABC$.

Pozn.: V.3.3. lze někdy považovat za axiom (tzv. Paschův axiom), jímž lze nahradit skupinu axiomů $A_7, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}$.

Př.: V narysovaných čarách je možno najít:



- a) 11 čtyřúhelníků
- b) 8 šestiúhelníků
- c) 8 osmiúhelníků
- d) 1 dvanáctiúhelník

Vypište všechny tyto mnohoúhelníky.

§4. Měření úseček a úhlů

Def.: Necht' $A, B \in E_2$. Přičemž uspořádané dvojici bodů $[A, B]$ reálné číslo označené $|AB|$, pro něž platí:

$$1. |AB| \geq 0, \text{ přičemž } |AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$2. |AB| = |BA|$$

$$3. C \in AB \Rightarrow |AB| = |CB| + |AC|$$

4. Necht' $\overrightarrow{AB}$ je polopřímka, $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$. Pak existuje právě jeden bod $C \in \overrightarrow{AB}$ tak, že $|AC| = m$.

Pak reálné číslo $|AB|$ nazveme délkou úsečky AB .

Pozn.:

- Za nulovou úsečku považujeme takovou úsečku, jejíž oba krajní body splynou (nemá žádný vnitřní bod). Podle 1. platí: $|AA| = 0$.
- Je-li AB nenulová úsečka, $C \in AB$ libovolný bod, pak úsečku AB nazýváme součtem úseček AC a CB . Podle 3. platí $|AB| = |CB| + |AC|$.

V.4.1.: Necht' $\overrightarrow{AB}$ je polopřímka, $C \in \overrightarrow{AB}$, $C \neq A$ její vnitřní bod takový, že $|AC| < |AB|$. Pak $C \in \overrightarrow{AB}$.

[Dk.: Platí: $A \neq B, C \neq A, C \neq B \Rightarrow A, B, C$ jsou tři různé kolineární body. Podle A_8 stačí dokázat, že $A \in \overrightarrow{BC}$ ani $B \in \overrightarrow{AC}$.

- $B \in \overrightarrow{AC}$, protože body B, C jsou vnitřními body téže polopřímky s počátkem A .
- $B \in \overrightarrow{AC}$ dokážeme sporem: Necht'

$$B \in \overrightarrow{AC} \Rightarrow |AC| = |AB| + |BC| \Rightarrow \text{protože } |BC| > 0, \text{ platí } |AC| > |AB| - \text{spor}$$

Def.: Řekneme, že konvexní úhly $\sphericalangle AVB, \sphericalangle BVC$ jsou ve styčné poloze (styčné úhly), leží-li

v jedné rovině a jejich průnikem je polopřímka $\overrightarrow{VB}$.

Jejich sjednocení nazýváme součtem úhlů $\sphericalangle AVB, \sphericalangle BVC$.

Pozn.: Součtem dvou konvexních úhlů nemusí být vždy konvexní úhel.

Def.: Necht' $\sphericalangle AVC$ je konvexní úhel nenulový ani přímý.

Řekneme, že polopřímka $\overrightarrow{VB}$ prochází mezi rameny úhlu $\sphericalangle AVC$, jestliže existuje úsečka

$A'C'$ tak, že $A' \in \overrightarrow{VA}, C' \in \overrightarrow{VC}$ a platí, že $A'C' \cap \overrightarrow{VB} \neq \emptyset$.

(Je-li úhel $\sphericalangle AVC$ přímý, pak řekneme, že každá polopřímka $\overrightarrow{VB}$ prochází mezi rameny $\sphericalangle AVC$.)

Pozn.: Každému konvexnímu úhlu $\sphericalangle AVC$ přiřadíme velikost úhlu (označme $|\sphericalangle AVC|$) ve stupních takto:

1. nulový úhel má velikost 0° , přímý úhel 180°
2. každý jiný konvexní úhel má velikost u° , kde $0^\circ < u^\circ < 180^\circ$, $u \in \mathbb{R}$
3. jestliže $\overrightarrow{VB}$ prochází mezi rameny konvexního úhlu $\sphericalangle AVC$, pak

$$|\sphericalangle AVC| = |\sphericalangle AVB| + |\sphericalangle BVC|$$
4. Necht' $\overrightarrow{VA}$ je polopřímka, $u \in \mathbb{R}$, $u \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$. Pak existuje polopřímka $\overrightarrow{VB}$ tak, že $|\sphericalangle AVB| = u^\circ$.

Pozn.: Velikost úhlu se kromě stupňů také udává v radiánech (také v gradech). Radián (rad) je jednotka míry obloukové, je to středový úhel příslušný v jednotkové kružnici kruhovému oblouku délky 1.

Z definice plyne: $360^\circ = 2\pi$ (rad), tedy $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, ...

Pozn.: Za další primitivní pojem zvolme shodnost (symbol $\cong$). Necht' pro něj platí:

1. $AB \cong CD \Leftrightarrow |AB| = |CD|$
2. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF \Leftrightarrow |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$
3. $\triangle A_1 B_1 C_1 \cong \triangle A_2 B_2 C_2 \Leftrightarrow |A_1 B_1| = |A_2 B_2| \wedge |A_1 C_1| = |A_2 C_2| \wedge |B_1 C_1| = |B_2 C_2| \wedge |\sphericalangle C_1 A_1 B_1| = |\sphericalangle C_2 A_2 B_2| \wedge |\sphericalangle A_1 B_1 C_1| = |\sphericalangle A_2 B_2 C_2| \wedge |\sphericalangle B_1 C_1 A_1| = |\sphericalangle B_2 C_2 A_2|$.

Axiom shodnosti:

A₁₃: Věta sus o shodnosti trojúhelníků:

Necht' pro $\triangle A_1 B_1 C_1, \triangle A_2 B_2 C_2$ platí:

$$|A_1 B_1| = |A_2 B_2| \wedge |A_1 C_1| = |A_2 C_2| \wedge |\sphericalangle C_1 A_1 B_1| = |\sphericalangle C_2 A_2 B_2|.$$

Pak platí: $\triangle A_1 B_1 C_1 \cong \triangle A_2 B_2 C_2$.

Pozn.: V dalším budeme úhly i jejich velikosti označovat malými řeckými písmeny.

Def.: Každý úhel o velikosti 90° se nazývá pravý.

Def.: Necht' $p, q \in \mathcal{P}$ jsou dvě různoběžky. Řekneme, že přímky p, q jsou na sebe kolmé (zapisujeme $p \perp q$), jestliže všechny čtyři úhly, které spolu svírají, jsou shodné (a tedy pravé).

V.4.2.: Necht' $p \in \mathcal{P}$ je přímka, $P \in p$ bod. Pak existuje právě jedna přímka q taková, že $p \perp q \wedge P \in q$.

- (Dk.) 1. existence: plyne z definice velikosti úhlu.
 2. jednoznačnost: sporem – Necht' $\exists q_1, q_2 \in \mathcal{P} : q_1 \perp p, q_2 \perp p$,
 $P \in q_1, P \in q_2, q_1 \neq q_2 \Rightarrow |\sphericalangle XPQ_1| \neq |\sphericalangle XPQ_2| \Rightarrow$ jestliže
 $|\sphericalangle XPQ_1| = 90^\circ$, pak $|\sphericalangle XPQ_2| \neq 90^\circ$ – spor.]

V.4.3.: Necht' $p \in \mathcal{P}$ je přímka, $P \notin p$ bod. Pak existuje právě jedna přímka q taková, že
 $p \perp q \wedge P \in q$.

- (Dk.) 1. existence: Necht' $X \in p$.
 a) Je-li $PX \perp p$, pak existuje.
 b) Je-li $PX \not\perp p$, pak přeneseme úhel $\sphericalangle PXA$ do opačné poloroviny
 s hranicí p a vrcholem X . Sestrojíme bod $Q \in \overrightarrow{XZ}$ tak, aby
 $|XP| = |XQ|$. $A \in PQ \cap p$.
 $\triangle XAP \cong \triangle XAQ$ (sas) : XA -společná strana, $|\sphericalangle AXP| = |\sphericalangle AXQ|$ podle
 konstrukce, $|XP| = |XQ|$ podle konstrukce.
 Tedy $|\sphericalangle XAP| = |\sphericalangle XAQ| \Rightarrow$ protože $|\sphericalangle PAQ|$ je přímý,
 $|\sphericalangle XAP| = 90^\circ \Rightarrow PA \perp p$
 2. jednoznačnost: sporem:
 Necht' $\exists q_1, q_2 \in \mathcal{P} : q_1 \perp p, q_2 \perp p, P \in q_1, P \in q_2, q_1 \neq q_2$.
 Označme $Q_1 \in q_1 \cap p, Q_2 \in q_2 \cap p \Rightarrow \exists \triangle PQ_1Q_2$, v němž existují dva
 pravé úhly – spor s tím, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je
 180° .]

Def.:

- a) Středem úsečky AB nazveme bod S , pro něj platí: $S \in AB \wedge |AS| = |BS|$. Označme
 $S = A \div B$.
 b) Osou úsečky AB nazveme přímku o , pro niž platí: o prochází středem úsečky AB
 $\wedge o \perp AB$.
 c) Osou úhlu $\sphericalangle AVC$ nazveme polopřímku $\overrightarrow{VB}$, pro niž platí: $\overrightarrow{VB}$ prochází mezi rameny
 $\sphericalangle AVC \wedge |\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle BVC|$

Pozn.: Klasifikace úhlů podle velikosti:

- nulový: $\alpha = 0^\circ$
- ostrý: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- pravý: $\alpha = 90^\circ$
- tupý: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- přímý: $\alpha = 180^\circ$
- konvexní (vypuklý): $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
- nekonvexní (dutý): $180^\circ < \alpha < 360^\circ$
- plný: $\alpha = 360^\circ$
- kosý: ostrý nebo tupý

Vzdálenost, odchylka:

Def.: Necht' $P \in E_2$ je bod, $p \in \mathcal{P}$ přímka. Bod P_0 nazýváme kolmým průmětem bodu P na přímku p (patou kolmice vedené z bodu P na přímku p), jestliže platí:

1. $P \in p \Rightarrow P_0 = P$
2. $P \notin p \Rightarrow P_0 = p \cap q$, kde $q \perp p \wedge P \in q$.

Def.:

- a) Necht' $A, B \in E_2$ jsou dva body. Vzdáleností dvou bodů A, B nazýváme délku úsečky $|AB|$.
- b) Necht' $P \in E_2$ je bod, $p \in \mathcal{P}$ přímka. Vzdáleností bodu P od přímky p nazýváme reálné číslo, označené $\rho(P, p)$, definované takto: $\rho(P, p) = |PP_0|$, kde P_0 je kolmý průmět bodu P na přímku p .

Pozn.: a) $P \in p \Rightarrow P_0 = P \Rightarrow \rho(P, p) = |PP_0| = 0$

b) $\forall P \in E_2, \forall p \in \mathcal{P} : \rho(P, p) \geq 0$, přičemž $\rho(P, p) = 0 \Leftrightarrow P_0 = P (\Leftrightarrow P \in p)$.

c) $\rho(P, p) = \min(\rho(P, X))$, kde $X \in p$ je libovolný bod.

Def.: Necht' $a, b \in \mathcal{P}$ jsou dvě rovnoběžné přímky. Vzdáleností dvou rovnoběžných přímek a, b nazýváme reálné číslo, označené $\rho(a, b)$, definované takto: $\rho(a, b) = \rho(A, b)$, kde $A \in a$ je libovolný bod.

Pozn.:

a) Někdy definujeme i vzdálenost různoběžek a klademe ji rovnu nule.

b) $\forall a, b \in \mathcal{P} : \rho(a, b) \geq 0$, přičemž $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$, je-li $a \parallel b$.

c) Necht' $a \parallel b$. Pro $\forall A_1, A_2 \in a$ platí: $\rho(A_1, b) = \rho(A_2, b)$.

Def.: Necht' $a, b \in \mathcal{P}$ jsou dvě přímky. Odchylkou dvou přímek a, b nazýváme reálné číslo φ , $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, kde φ je velikost úhlu, který spolu přímky a, b svírají (u různoběžek). U rovnoběžek klademe $\varphi = 0^\circ$.

Pozn.:

a) Odchylka dvou přímek je tedy velikost nulového, ostrého nebo pravého úhlu.

b) Úhel, jehož velikost je odchylkou dvou přímek, může mít libovolně zvolený vrchol V a ramena má na přímkách, které procházejí bodem V a jsou rovnoběžné s danými přímkami.